TRAVAUX RURAUX DE STRASBOURG OPTION BIOLOGIQUE-MATHÉMATIQUE
CONCOURS D'ENTRÉE 1983

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES (3 heures)

Correction

I

1. La linéairité de f résulte de celle de u. Il est clair que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(A)$, d'où $\mathrm{rg}(f) = 1$.

2. Notons $\mathrm{Sp}(f)$ l'ensemble des valeurs propres de f. Supposons $\mathrm{Sp}(f) \neq \emptyset$
Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}f$, alors il existe $x \in E\backslash\{0\}$ tel que $f(x) = \lambda x$ ou encore $u(x)(\lambda - u(A)) = 0$.
• Si $u(x) = 0$, alors $f(x) = 0$, donc 0 est valeur propre de f et le sous-espace propre associé $E_0 = \ker u$.
• Si $u(x) \neq 0$, alors $\lambda = u(A)$ et on a $f(A) = u(A)A$, le vecteur propre associé à $u(A)$ est donc A, d'où le sous-espace propre associé $E_{u(A)} = \mathrm{Vect}(A)$.

3. On a $\mathrm{rg}\, f = 1$, c'est-à-dire $\dim \ker f = n - 1$, donc 0 est valeur propre d'ordre au moins $n - 1$, d'où f est diagonalisable si et seulement si $u(A) \neq 0$.

4. (a) Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1 et soit $B \in E$ tel que $\mathrm{Im}\, g = \mathrm{Vect}(B)$, d'où :

$$\forall x \in E, \exists l_x \in \mathbb{R} : g(x) = l_x B$$

On vérifie facilement que l'application $v : x \mapsto l_x$ est une forme linéaire sur E, non nulle car l'endomorphisme g est non nul. Donc on a : $\forall x \in E,\ g(x) = v(x)B$

(b) On a $\mathrm{rg} = 1$ ou encore $\dim \ker g = n - 1$, et on a aussi $g(B) = v(B)B$ et par conséquent g est diagonalisable si et seulement si $v(B) \neq 0$ ce qui est équivalent à $g^2 \neq 0$ à cause de l'égalité $g^2(B) = (v(B))^2 B$.

(c) Soit $(e_1, e_2, ...e_{n-1})$ une base de $\ker g$, alors $(e_1, e_2, ...e_{n-1}, B)$ est une base de E et dans cette base la matrice de g s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha \end{pmatrix}$$

avec $\alpha = v(B) \neq 0$.

(d) Dans ce cas on a $g(B) = 0$, donc on compléte B en une base $(B, e_2, ...e_{n-1})$ de $\ker g$, considérons ensuite un vecteur $e_n \in E : g(e_n) = v(e_n)B, v(e_n) \neq 0$.
Donc $(B, e_2, ...e_{n-1}, e_n)$ est une base de E dans laquelle la matrice de g s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

5. Soient M et N deux matrices de rang 1. Supposons que M et N sont semblables, alors il existe $P \in \mathcal{GL}_n(R)$ tel que $M = P^{-1}NP$. D'où

$$\mathrm{tr}(M) = \mathrm{tr}(P^{-1}NP) = \mathrm{tr}(NPP^{-1}) = \mathrm{tr}(N).$$

Inversement, si $\operatorname{tr} M = \operatorname{tr} N$ et si $M^2 \neq 0$, alors il existe $P \in \mathbf{GL}_n(R)$ tel que $M = P^{-1}\begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & \operatorname{tr} M \end{pmatrix} P$ et la condition $\operatorname{tr} M = \operatorname{tr} N$ entraîne que $N^2 \neq 0$. Donc il existe $Q \in \mathbf{GL}_n(R) : N = Q^{-1}\begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & \operatorname{tr} M \end{pmatrix} Q$.

D'où $Q^{-1}PM(Q^{-1}P)^{-1} = N$, donc M et N sont semblables.

Si $M^2 = N^2 = 0$ les deux matrices M et N sont semblables à $\begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

6. On a $\operatorname{tr} M = \operatorname{tr} N = 0$, donc les deux matrices M et N sont semblables.

II

1. Notons g la restriction de h à $\ker u$, $\forall x \in \ker u,\ \ g(x) = u(A)x$, donc g est homothétie de rapport $u(A)$. D'autre par si $x \in \ker h$, alors $u(A)x = u(x)$ et donc $x \in \operatorname{Vect}(A)$, d'où $\ker h = \operatorname{Vect}(A)$.

2. Pour tout $x \in E$, $u \circ h(x) = u(A)u(x) - u(x)u(A) = 0$, donc $\operatorname{Im} h \subset \ker u$ et comme $\dim \operatorname{Im} h = n - 1$ alors $\operatorname{Im} h = \ker u$.

3. Supposons que $\operatorname{Sp}(h) \neq \emptyset$.
Soit $\lambda \in sp(h)$. Alors il existe $x \neq 0 : u(A)x - u(x)A = \lambda x$, c'est-à-dire $(u(A) - \lambda)x = u(x)A$.
• Si $\lambda \neq u(A)$, alors $x \in \operatorname{Vect}(A)$ et on a aussi $h(A) = 0$. Donc $\lambda = 0$ et $E_0 = \operatorname{Vect}(A)$.
• Si $\lambda = u(A)$, alors $u(x) = 0$, d'où $E_{u(A)} = \ker u$.
Si $\dim E$ est de dimension finie, h est diagonalisable car $\dim E_0 = 1$ et $\dim E_{u(A)} = n - 1$.

4. (a) Soit $x \in E\backslash\{0\}$ une solution non nulle de l'équation (1). Alors $x \in \operatorname{Vect}(A)$, d'autre part pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\alpha(\lambda A) - u(\lambda A)A = 0$$

Donc si $\alpha \neq u(A)$ l'équation en question n'admet que la solution nulle et si $\alpha = u(A)$ l'espace de solutions est la droite vectorielle $\operatorname{Vect}(A)$.

(b) Si x_0 est solution de (2), alors $x \in E$ est solution de (2) si et seulement si $x - x_0$ est solution de (1). Donc l'équation (2) admet des solutions non triviales si et seulement si $\alpha = u(A)$.
D'autre part si x est solution de (2), alors $u(A)x - u(x)A = B$ c'est-à-dire $x \in F = \dfrac{1}{u(A)}B + \operatorname{Vect}(A)$. Réciproquement, soit $y \in F, y = \dfrac{1}{u(A)}B + \mu A$.

$$u(A)y - u(y)A = B \Longleftrightarrow B + \mu u(A)A - \frac{u(B)}{u(A)}B - \mu u(A)A = B.$$

Donc nécessairement, $u(B) = 0$. D'où :
• Si $\alpha \neq u(A)$, l'équation (2) admet une seule solution.
• Si $\alpha = u(A)$, et $u(B) = 0$, l'espace des solutions de l'équation (2) est l'espace affine $\dfrac{1}{u(A)}B + \operatorname{Vect}(A)$.

5. (a) Comme $\mathrm{tr}({}^tA - A) = 0$ et $\alpha = \mathrm{tr}(A)$, alors l'espace de solutions de l'équation $\mathrm{tr}(A)x - \mathrm{tr}(x)A = {}^t A - A$ est $\frac{1}{{}^t A}({}^tA - A) + \mathrm{Vect}(A)$.

(b) Soit a la fonction définie sur $[0, \pi]$ par $a(t) = \sin(t)$. On cherche d'abord une solution particulière f_0, si f_0 existe alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f_0(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \lambda \sin(x)$ en remplaçant dans l'équation (4) on trouve $\lambda = -2$, d'où $f_0(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \lambda \sin(x)$, et comme $u(a) = 2 \neq 1$ (1 la valeur de α) l'équation (4) admet une solution unique, c'est $x \mapsto f_0(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \lambda \sin(x)$

III

1. Soit $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ la matrice qui représente la forme linéaire u. Donc si $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, alors $u(X) = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = ax + by + cz = \overrightarrow{A}.\overrightarrow{X}$, il suffit donc de prendre $\overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Le vecteur $\overrightarrow{B}$ est non nul puisque u est non nulle.

2. Comme P est orthogonal à $\overrightarrow{B}$ et $\overrightarrow{A}.\overrightarrow{B} \neq 0$, alors $\overrightarrow{A} \notin P$ et donc

$$E = P \oplus \mathrm{Vect}(\overrightarrow{A}).$$

Soit $\overrightarrow{X} \in E$, alors il existe un réel $\lambda_{\overrightarrow{X}}$ tel que $X = p\left(\overrightarrow{X}\right) + \lambda_{\overrightarrow{X}} \overrightarrow{A}$ et donc $\overrightarrow{X}.\overrightarrow{B} = p\left(\overrightarrow{X}\right).\overrightarrow{B} + \lambda_{\overrightarrow{X}} \overrightarrow{A}.\overrightarrow{B}$. D'où $\lambda_{\overrightarrow{X}} = \dfrac{\overrightarrow{X}.\overrightarrow{B}}{\overrightarrow{A}.\overrightarrow{B}}$ et donc

$$p\left(\overrightarrow{X}\right) = \overrightarrow{X} - \frac{\overrightarrow{X}.\overrightarrow{A}}{\overrightarrow{B}.\overrightarrow{B}} \overrightarrow{A}$$

3. Soit $\overrightarrow{B}$ un vecteur non nul tel que $\forall \overrightarrow{X} \in E,\ \ u(\overrightarrow{X}) = \overrightarrow{B}.\overrightarrow{X}$. Donc

$$h\left(\overrightarrow{X}\right) = \overrightarrow{B}.\overrightarrow{A}\overrightarrow{X} - \overrightarrow{B}.\overrightarrow{X}\overrightarrow{A}$$

D'où $h\left(\overrightarrow{X}\right) = (\overrightarrow{A}.\overrightarrow{B})p\left(\overrightarrow{X}\right)$. Donc h est la composée de la projection p et de l'homothétie de rapport $\overrightarrow{A}.\overrightarrow{B}$. On remarque aussi que $h\left(\overrightarrow{X}\right) = \overrightarrow{B} \wedge (\overrightarrow{X} \wedge \overrightarrow{A})$.

●●●●●●●●●